TIF101 Tillämpad kvantfysik

Datum:	24 augusti 2022
Tid:	8.30 – 12.30
Examinator:	Anders Hellman, telefon: 031-7725611
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, Chalmersgodkänd miniräknare.
Betygsgränser :	Betyg 3: 17 p, betyg 4: 25 p, betyg 5: 37 p (inkluderat poäng från inlämningsuppgifter). Tentamen maximalt 24 p.

---

1. **Sannolikheter och väntevärden (4 poäng)**
   Antag att elektronen i en väteatom beskrivs av superpositionen
   $$|\psi\rangle = A\left[2\,|\psi_{100}\rangle - 2\,|\psi_{211}\rangle + 3\,|\psi_{210}\rangle\right],$$
   där egentillstånden betecknas $|\psi_{n\ell m}\rangle$ och A är en normaliseringskonstant. Bestäm A och beräkna sedan

   a) Sannolikheten att mäta ett tillstånd med $\ell = 1$.

   b) Väntevärdet för $\hat{L}_z$. Behåll $\hbar$ i svaret.

   c) Väntevärdet för $\hat{L}^2$. Behåll $\hbar$ i svaret.

   Joniseringsenergin för väte är $E_n = -\frac{E_\mathrm{H}}{2}\frac{1}{n^2}$ där E_H är Hartree-energin.

   d) Bestäm väntevärdet för den uppmätta energin i eV.

2. **Transmonen – en lätt anharmonisk oscillator (4 poäng)**
   Utgå från Hamiltonianen för *transmonen*, den för närvarande mest populära supraledande kvantbiten,
   $$\hat{H} = \frac{\hat{q}^2}{2C} - E_J \cos\left(2\pi\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0}\right),$$
   där C är kvantbitens kapacitans, $\hat{q}$ operatorn för laddningen på kapacitansen, E_J är den så kallade Josephson-energin som bestämmer Josephson-övergångens maximala superström, $\hat{\Phi}$ är operatorn för det magnetiska flödet genom övergången och $\Phi_0 = h/2e$ är det så kallade magnetiska flödeskvantat. I den experimentellt relevanta regimen där flödet genom övergången är mycket mindre än ett flödeskvantum, kan man störnings-utveckla cosinus-termen till andra ordningen i Φ/Φ_0,
   $$\hat{H}_0 \approx \frac{\hat{q}^2}{2C} + \frac{\hat{\Phi}^2}{2L_J}, \tag{1}$$
   där $L_J = \hbar^2/\left(4e^2E_J\right)$ är Josephson-övergångens induktans.

   a) Skriv om denna hamiltonian på formen
   $$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + konstant$$
   genom att introducera stegoperatorer $\hat{a}$ och $\hat{a}^\dagger$ enligt
   $$\hat{q} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2Z_0}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad \hat{\Phi} = \sqrt{\frac{\hbar Z_0}{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$
   där $Z_0 = \sqrt{L_J/C}$ och $\left[a, a^\dagger\right] = 1$. Vad blir ω? (1 p)

b) Utvecklar man cosinus-termen till fjärde ordningen (tredje är ju noll) blir nästa term:

$$\hat{H}' = \frac{e^2}{24C}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4$$

Behandla denna fjärde ordningens term som en störning och räkna ut första ordningens störning av den harmoniska oscillatorns egenergier $E_n = n\hbar\omega$. Detta går utmärkt att göra med stegoperatorer. (3 p)

3. **Elektronstrukturen för atomer (4 poäng)**

   a) Motivera och redovisa alla Russell-Saunders ($^{2S+1}L_J$) termer för kol C:$1s^2 2s^2 2p^2$. (3 poäng)

   b) Vilken av ovanstående termer identifierar grundtillståndet? (1 poäng)

4. **Molekylspektroskopi (4 poäng)**
   Två närliggande (J och J+1) rotationslinjer i R-grenen för $^{14}N^1H$ har mätts till 98.036 och 130.714 cm^{-1}.

   a) Bestäm bindningsavståndet mellan ^{14}N och ^1H. (2p)

   b) Bestäm kvanttalet (J) för rotationen för de båda observerade värdena. (1p per J).

5. **Hybridorbitaler (4 poäng)**
   Nedan finns ett förslag till sp^2 hybridorbitaler uttryckt i s- och p-orbitaler.

$$\varphi_1 = |s\rangle + \sqrt{2}|p_y\rangle \tag{2}$$

$$\varphi_2 = |s\rangle - \sqrt{\frac{3}{2}}|p_x\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|p_y\rangle \tag{3}$$

$$\varphi_3 = |s\rangle - c_1|p_x\rangle - c_2|p_y\rangle \tag{4}$$

   a) Bestäm konstanterna c_1 och c_2 så att hybridorbitalerna är ortogonala samt normalisera vågfunktionerna. (2p)
   Använd att :

$$\langle s|s\rangle = 1 \tag{5}$$

$$\langle p_i|p_i\rangle = 1 \tag{6}$$

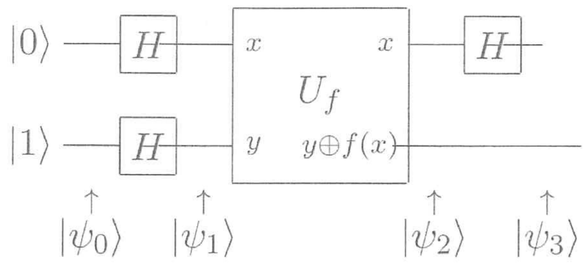
$$\langle s|p_i\rangle = 0 \tag{7}$$

$$\langle p_i|p_j\rangle = 0 \tag{8}$$

(9)

   b) Antag att hybridorbitalerna är som vektorer där p-komponenten anger vektorns riktning, beräkna vinkeln mellan φ_1 och $\cancel{\varphi_1}$ φ_2. Notera att p-komponenten enbart inte är normerad även om φ_i är normerad. (2p)

6. **Deutsch algoritm (4 poäng)**
Kretsen nedan beskriver Deutsch algoritm.
Vad är det för problem som löses med denna algoritm? (1 p)
Analysera algoritmen genom att skriva ner de fyra registertillstånden $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ och $|\psi_3\rangle$ (2 p).
Vad är det för mätning som skall utföras på $|\psi_3\rangle$ för att få ut svaret? (1 p)



Figur 1: Deutsch algoritm.